МЕТОД ДОПОМІЖНОГО КУТА

Олександр Феліксович Крижановський, учитель-методист

КЗ «Харківський академічний ліцей №45 Харківської міської ради»,

Заслужений вчитель України

ІДЕЯ №1
ВИКОРИСТАННЯ ЗВʹЯЗКА МІЖ КУТАМИ

ІДЕЯ №2
ВИКОРИСТАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

ІДЕЯ №3
ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТА АЛГЕБРАЇЧНИХ ФАКТІВ

ІДЕЯ №4
ВИКОРИСТАННЯ ЗВʹЯЗКА МІЖ АЛГЕБРОЮ, ГЕОМЕТРІЄЮ ТА ТРИГОНОМЕТРІЄЮ

МЕТОД ДОПОМІЖНОГО КУТА

ІДЕЯ №1
ВИКОРИСТАННЯ ЗВ′ЯЗКА МІЖ КУТАМИ

Задля розв′язування геометричних задач на обчислення чи доведення часто варто ввести до розгляду якийсь один невідомий кут (чи декілька невідомих кутів).

Далі зазвичай виражають інші кути через уведені до розгляду, та знаходять їх із певного рівняння, або доводять із їх використанням певні твердження.

Позначимо кут B через α та кут E через β.

$\angle ADF = \alpha + \beta$ $\angle BCA = \angle CFE + \beta$

$\alpha = \angle CFE + \beta$ $\angle DFA = \alpha - \beta$

Розглянемо трикутник DFA.

$\angle ADF = \alpha + \beta > \alpha - \beta = \angle AFD$

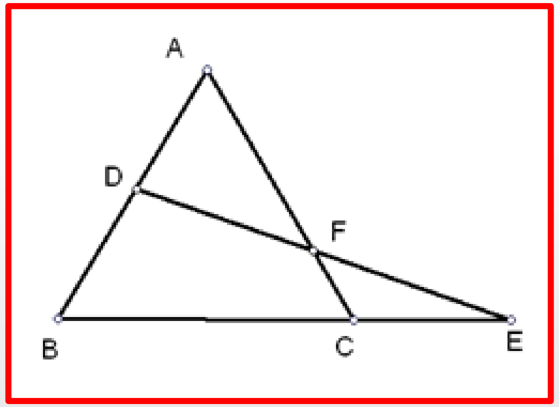
$\angle ADF > \angle AFD \Rightarrow AF > AD$

Приклад №1

На рисунку нижче

AB = AC.

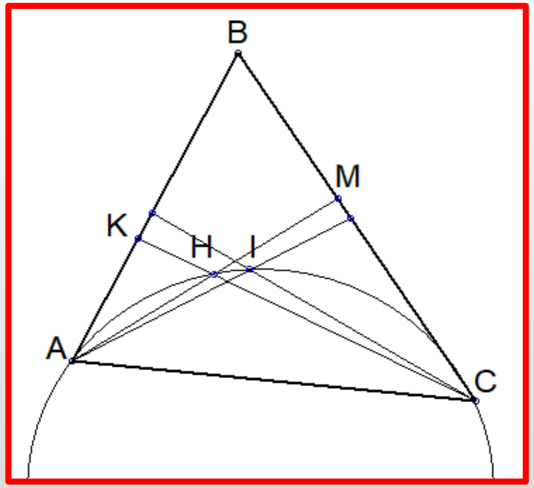
Доведіть, що AF > AD.



Приклад №2

У даному гостро-кутному трикутнику ABC точка I – центр вписаного кола, точка H – ортоцентр. Відомо, що точки A, I, H, C належать одному колу.

Знайдіть кут ABC.



Позначимо кут ABC через β.

$$\angle IAC + \angle ICA = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\angle AIC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$$

$$90^\circ + \beta + 90^\circ + \angle KHM = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\angle KHM = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle AHC = 180^\circ - \beta$$

Точки *A*, *I*, *H*, *C* належать одному колу,
причому точки *I* та *H* лежать по один бік від *AC*

$$\angle AIC = \angle AHC \Rightarrow 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \beta \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

ІДЕЯ №2
ВИКОРИСТАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Задля розвʹязування геометричних задач на обчислення чи доведення можна ввести до розгляду якийсь один невідомий кут (чи декілька невідомих кутів).

Далі виразити інші кути та сторони, використовуючи при цьому тригонометричні функції, та скласти певне тригонометричне рівняння. Після його розвʹязання можна знайти шукані кути чи сторони або довести певні твердження.

$$BK = \frac{r}{\tan 30^\circ} \quad BL = \frac{r_b}{\tan 30^\circ} \Rightarrow KL = \frac{r_b - r}{\tan 30^\circ}$$

Позначимо кут IAK через α. $\angle I_b AL = 90^\circ - \alpha$

$$AK = \frac{r}{\tan\alpha} \quad AL = \frac{r_b}{\tan(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow KL = \frac{r}{\tan\alpha} + \frac{r_b}{\tan(90^\circ - \alpha)}$$

$$KL = \frac{r_b - r}{\tan 30^\circ} = \frac{r}{\tan\alpha} + \frac{r_b}{\tan(90^\circ - \alpha)}$$

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{\tan\alpha} + (\sqrt{3}+1)\tan\alpha \quad \text{Нехай } \tan\alpha = x$$

$$(\sqrt{3}+1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3}-1)x = 0 \qquad x = \frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{3}+1}$$

1) $\tan\alpha = x = 1$, звідки $\alpha = 45^\circ$, а невідомі кути трикутника - 90° та 30°.

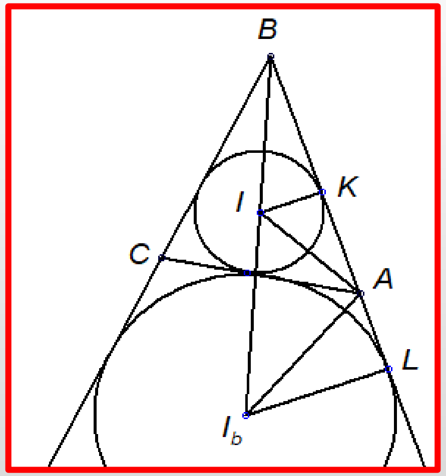
2) $\tan\alpha = x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, звідки $\alpha = 15^\circ$, а невідомі кути трикутника - 90° та 30°.

Приклад №3

У трикутнику АВС з кутом В, що дорівнює 60°, відомі радіуси вписаного та зовнівписаного кіл:

$$r = \sqrt{3} - 1, r_b = \sqrt{3} + 1$$

Знайдіть невідомі кути трикутника АВС.



$$\tan\alpha = 2\cdot\tan\beta \qquad \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

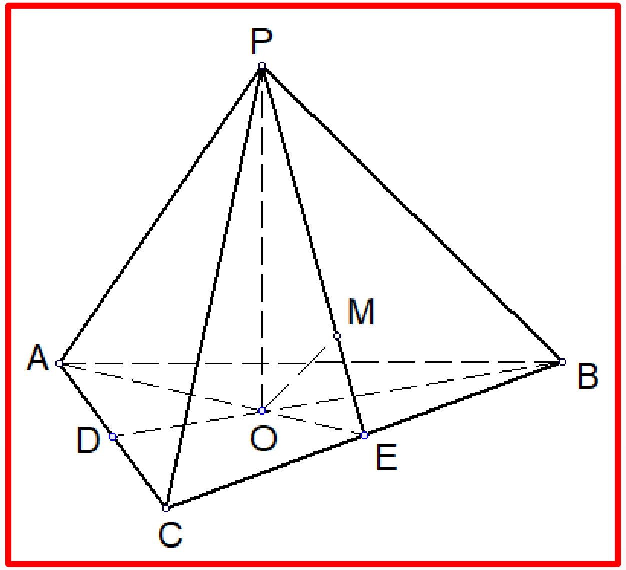
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4\tan^2\beta}} \qquad \sin\alpha = \frac{2\tan\beta}{\sqrt{1+4\tan^2\beta}}$$

$$OE = \frac{d}{\sin\alpha} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}d}{\sin\alpha} \qquad S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}d^2}{\sin^2\alpha}$$

$$OP = \frac{d}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{d}{\cos\alpha}$$

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{d^3\sqrt{3\left(1+4\tan^2\beta\right)^3}}{4\tan^2\beta}$$

Приклад №4



У правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β. Відстань від центра основи піраміди до бічної грані дорівнює d. Знайдіть об′єм даної піраміди.

ІДЕЯ №3
ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТА АЛГЕБРАЇЧНИХ ФАКТІВ

Задля розвʹязування геометричних задач на обчислення чи доведення можна ввести до розгляду якийсь один невідомий кут (чи декілька невідомих кутів).

Далі виразити інші кути та сторони, використовуючи при цьому тригонометричні функції. Для подальшого розвʹязування задачі можна скористатися як планіметричними фактами, так і властивостями тригонометричних функцій, а також відомими алгебраїчними фактами.

$$\angle EI_aC = \gamma/2\ ;\ \angle EI_aB = \beta/2 \Rightarrow EC = r_a \tan \gamma/2,\ BE = r_a \tan \beta/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = r_a\left(\tan \beta/2 + \tan \gamma/2\right)$$

$$\boxed{r_a \tan \beta/2 \tan \gamma/2 = r}$$

$$BC = r\left(\cot \beta/2 + \cot \gamma/2\right) = r \cdot \frac{\tan \beta/2 + \tan \gamma/2}{\tan \beta/2 \tan \gamma/2}$$

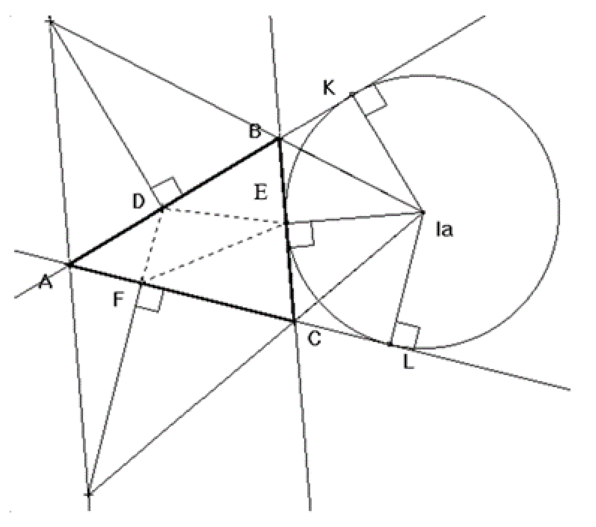
$$EC = \frac{r}{\tan \beta/2},\ BE = \frac{r}{\tan \gamma/2};\quad BD = \frac{r}{\tan \alpha/2}$$

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos\beta = \frac{r^2}{\tan^2 \alpha/2} + \frac{r^2}{\tan^2 \gamma/2} -$$

$$-2 \cdot \frac{r^2}{\tan \alpha/2 \tan \gamma/2} \cdot \cos\beta = \frac{r^2}{\tan^2 \alpha/2} + \frac{r^2}{\tan^2 \gamma/2} + \frac{2r^2}{\tan \alpha/2 \tan \gamma/2} - \frac{2r^2}{\tan \alpha/2 \tan \gamma/2} -$$

$$-2 \cdot \frac{r^2}{\tan \alpha/2 \tan \gamma/2} \cdot \cos\beta = \left(\frac{r}{\tan \alpha/2} + \frac{r}{\tan \gamma/2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{r^2}{\tan \alpha/2 \tan \gamma/2} \cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}$$

Приклад №5



Нехай D, E, F – точки дотику зовнівписаних кіл на сторонах AB, BC, AC трикутника ABC; S та R – площа та радіус описаного кола.

Доведіть:

$$\frac{2S}{R} \le DE + EF + DF < 3\sqrt{3}R$$

$$=\left(\frac{r}{\tan\alpha/2}+\frac{r}{\tan\gamma/2}\right)^2-2\cdot\frac{r^2}{\tan\alpha/2\,\tan\gamma/2}\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}=$$

$$=b^2-\frac{4r^2\cos^2\beta/2\,\cos\alpha/2\,\cos\gamma/2}{\sin\alpha/2\,\sin\gamma/2}=$$

$$=b^2-\frac{4r^2\sin\beta/2\,\cos^2\beta/2\,\cos\alpha/2\,\cos\gamma/2}{\sin\alpha/2\,\sin\beta/2\,\sin\gamma/2}=$$

$$=b^2-\frac{2r^2\sin\beta\cdot\frac{p}{4R}}{\frac{r}{4R}}=b^2-2pr\sin\beta=b^2-2S\sin\beta=$$

$$=4R^2\sin^2\beta-4R^2\sin\alpha\sin\gamma\sin^2\beta=4R^2\sin^2\beta(1-\sin\alpha\sin\gamma)$$

$$\boxed{DE=2R\sin\beta\sqrt{1-\sin\alpha\sin\gamma}}$$

Приклад №5

Ми використовуємо додаткові формули:

$$\sin\alpha/2\,\sin\beta/2\,\sin\gamma/2=\frac{r}{4R}$$

$$\frac{p}{4R}=\cos\alpha/2\,\cos\beta/2\,\cos\gamma/2$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{S}{2R^2}$$

$$DE = 2R\sin\beta\sqrt{1-\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$EF = 2R\sin\gamma\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$DF = 2R\sin\alpha\sqrt{1-\sin\beta\sin\gamma}$$

$$DE + EF + DF = 2R(\sin\beta\sqrt{1-\sin\alpha\sin\gamma} + \sin\gamma\sqrt{1-\sin\alpha\sin\beta}) +$$
$$+\sin\alpha\sqrt{1-\sin\beta\sin\gamma}) \le 2R\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\,\cdot$$
$$\cdot\sqrt{3-\left(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\right)}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = \frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2} \le \frac{9R^2}{4R^2} = \frac{9}{4}$$

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \ge 3\cdot\sqrt[3]{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2} = 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{S}{2R^2}\right)^2}$$

$$\boxed{P_{DEF} = DF + DE + EF \le 3R\sqrt{3-\sqrt[3]{\left(\frac{S}{2R^2}\right)^2}} < 3\sqrt{3}R}$$

Приклад №5

Ми використовуємо:

нерівність Коші-Буняковського-Шварца

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le$$
$$\le \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\cdot\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}$$

та формулу і нерівність Лейбниця

$$MO^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$$

ІДЕЯ №4
ВИКОРИСТАННЯ ЗВʹЯЗКА МІЖ АЛГЕБРОЮ, ГЕОМЕТРІЄЮ ТА ТРИГОНОМЕТРІЄЮ

Задля розвʹязування алгебраїчних задач на обчислення чи доведення можна ввести до розгляду якийсь один невідомий кут (чи декілька невідомих кутів).

Далі виразити змінні та вирази з ними з умови задачі, використовуючи тригонометричні функції введених кутів та їхні властивості. Для подальшого розвʹязування задачі можна скористатися формулами для перетворення тригонометричних виразів.

Приклад №6

Для довільних додатних чисел *a*, *b*, *c*, *d* доведіть нерівність:

$$\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\geq 4$$

Нехай $a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\gamma, d=\tan\delta$, причому $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{a^2+1}{a+b}=\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}=$$

$$=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\cos\gamma}{\cos\beta\cdot\sin(\beta+\gamma)}+\frac{\cos\delta}{\cos\gamma\cdot\sin(\gamma+\delta)}+\frac{\cos\alpha}{\cos\delta\cdot\sin(\delta+\alpha)}\geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta\cdot\sin(\beta+\gamma)}\cdot\frac{\cos\delta}{\cos\gamma\cdot\sin(\gamma+\delta)}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\delta\cdot\sin(\delta+\alpha)}}=$$

$$=4\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\delta+\alpha)}}\geq 4$$

Приклад №7

Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел x, y із проміжку $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

виконується нерівність:

$$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\le 1$$

За яких значень x, y у даній нерівності досягається рівність?

Позначимо $x=\tan\alpha;\, y=\tan\beta;\, \alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

$$\cos\alpha\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right], \cos\beta\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right],\ \sin(\alpha+\beta)\in\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}\le\frac{1}{\sqrt{3}/2}\left(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\alpha+\beta)\le\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$$

Очевидно, що рівність досягається при $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$, тобто $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ВИСНОВКИ

Метод

допоміжного кута

доречно використо-вувати при розв'язанні:

1) шкільних задач з планіметрії;
2) шкільних задач із стереометрії;
3) олімпіадних задач з алгебри та геометрії;
4) дослідницьких задач.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

Олександр Феліксович Крижановський

plushakaf1@gmail.com