

**ВИКОРИСТАННЯ  
WOLFRAM MATHEMATICA  
В КУРСІ  
"КЕРОВАНІСТЬ ТА СТАБІЛІЗАЦІЯ"**

**Тетяна Сморцова**

доцент кафедри прикладної математики,

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

"Керованість та стабілізація" – дисципліна за вибором для студентів 3 курсу спеціальності "Прикладна математика".

Метою цього курсу є надання майбутнім спеціалістам знань у галузі теорії керування і використання її методів для дослідження прикладних задач.

Студенти мають навчитися розв'язувати різноманітні задачі керованості та стабілізації для різних класів керованих систем диференціальних рівнянь.

За допомогою Wolfram Mathematica 12.1 вдалось вирішити такі проблеми.

1. Розробка задач для самостійного розв'язання студентами.
2. Аналітичне розв'язання задач для систем вищих порядків.
3. Візуалізація отриманих розв'язків, їх аналіз.

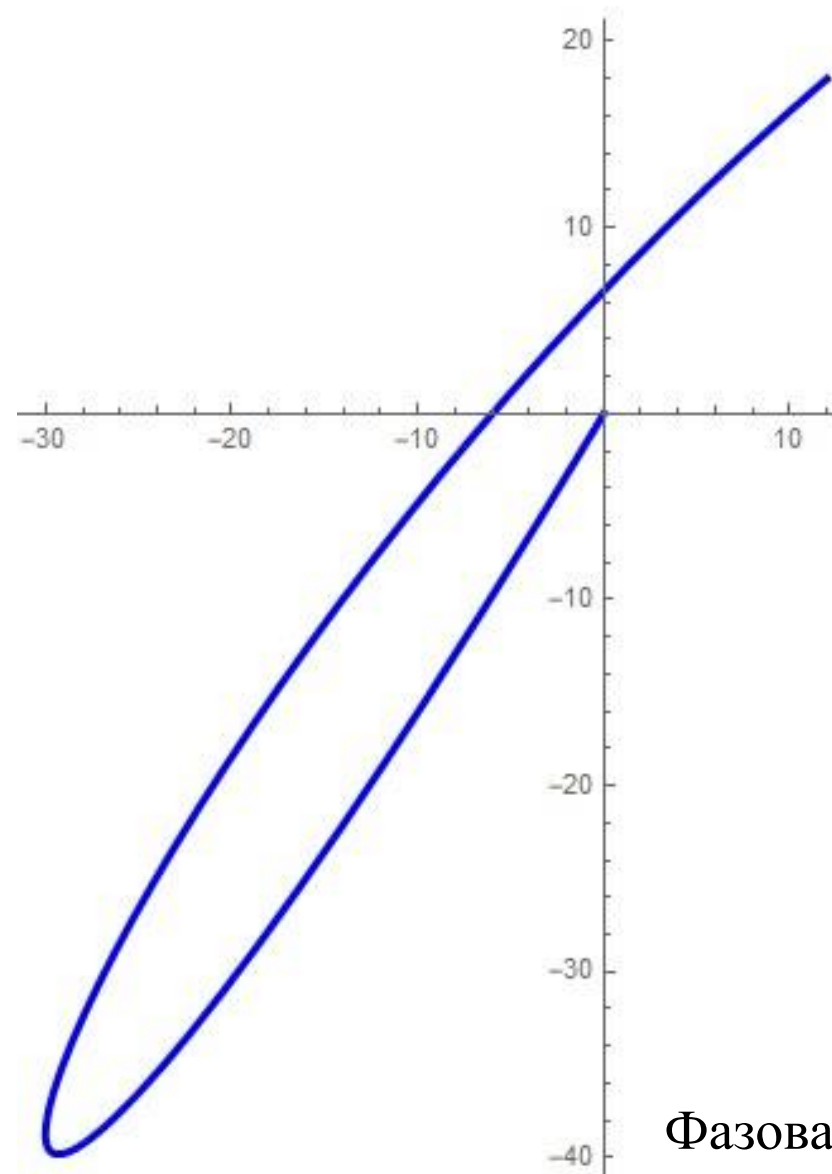
Знайти керування, яке переводить точку  $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$  в точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  за час  $[0; 2]$  в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{2}{t+3}x_1 - \frac{2}{(t+3)^2}x_2 + 3(t+3)u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (t+3)^2u. \end{cases}$$

Керування, яке розв'язує цю задачу має вигляд

$$u(t) = 6t - 6,5.$$

Відповідна траєкторія системи?



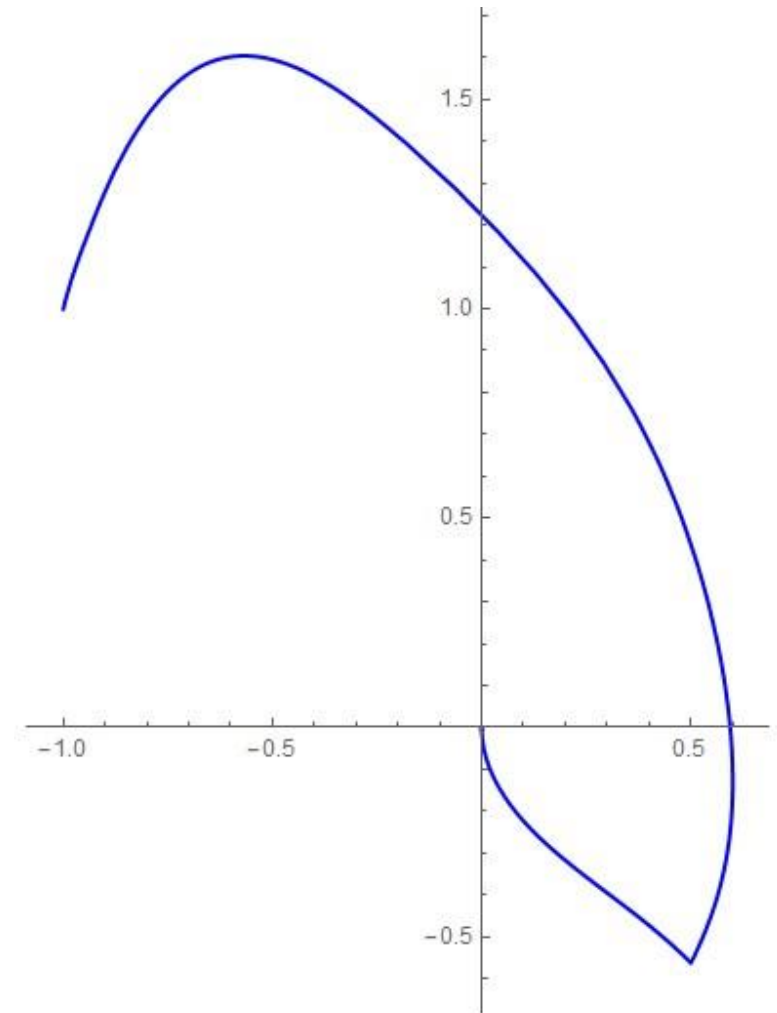
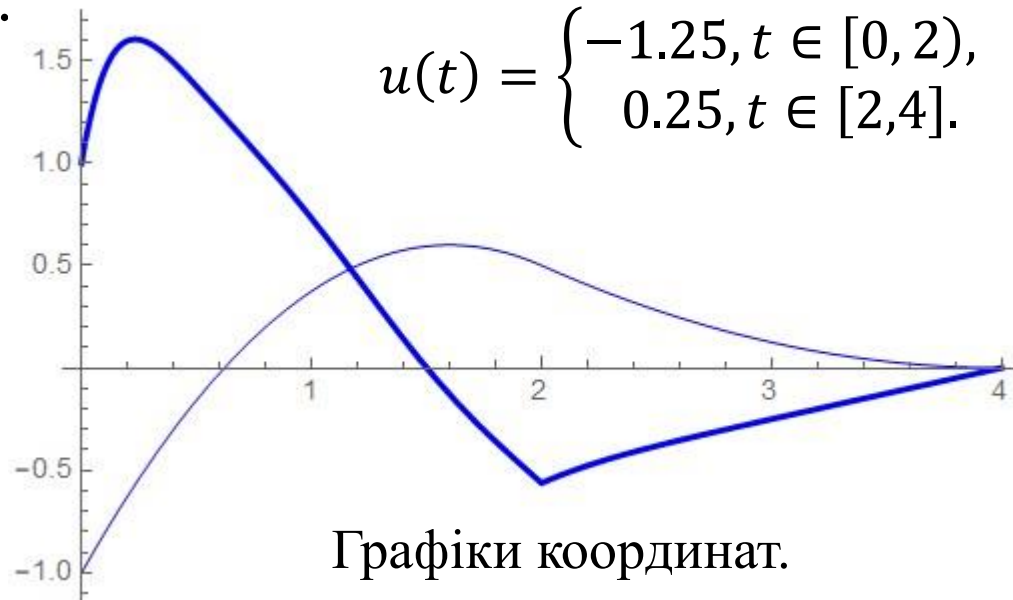
Фазова траєкторія.

Знайти кусково-стале керування, яке переводить точку  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  в точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  в силу

системи 
$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + y, \\ \dot{y} = -4x^7 - 4x^3y + u, \end{cases}$$

за проміжок часу  $[0,4]$  та має перемикання в точці  $t_1 = 2$ .

$$u(t) = \begin{cases} -1.25, & t \in [0, 2), \\ 0.25, & t \in [2, 4]. \end{cases}$$



Знайти керування, яке переводить точку

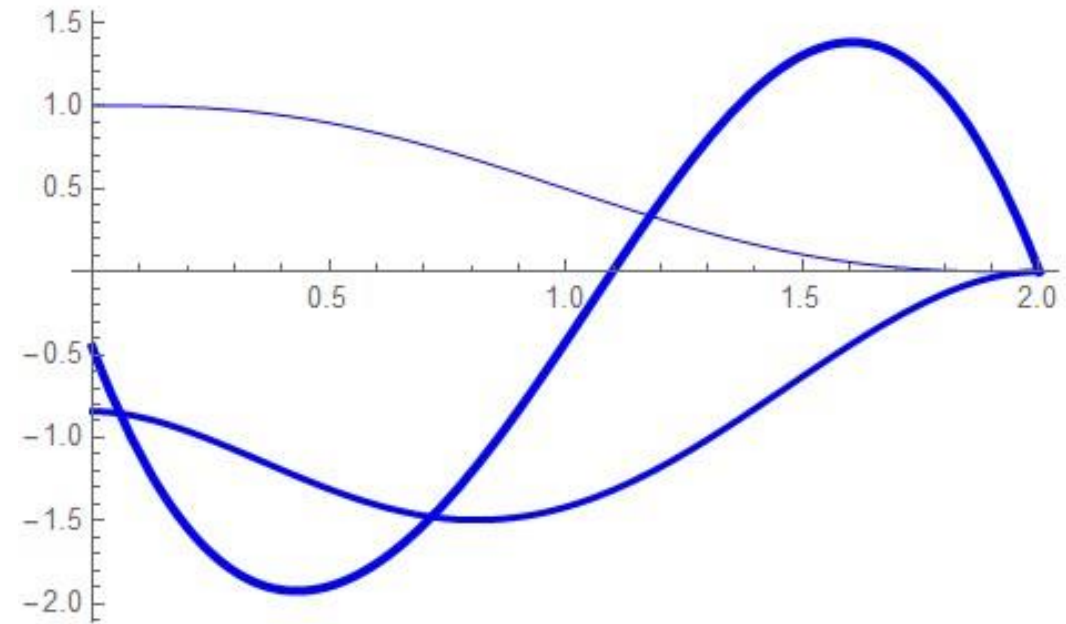
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sin 1 \\ -\frac{1}{2}\sin 2 \end{pmatrix} \text{ в точку } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ в силу системи}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\cos(2x_1) \sin x_1 - x_2 \cos(2x_1) + u. \end{cases}$$

за проміжок часу  $[0, 2]$ .

Керування, яке розв'язує цю задачу, має вигляд

$$u(t) = 15(2 - 6t + 3t^2)/4.$$



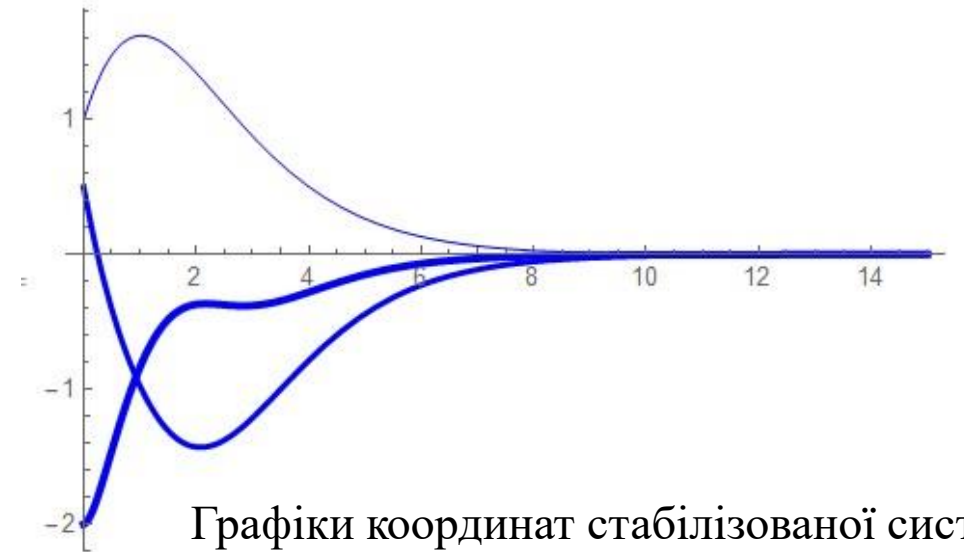
Графіки координат системи.

Знайти керування, яке стабілізує систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\cos(2x_1) \sin x_1 - x_2 \cos(2x_1) + u. \end{cases}$$

Керування, яке розв'язує цю задачу, має вигляд

$$u(x) = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3 \sin x_1 - 3 \cos x_1 \sin x_1.$$



Графіки координат стабілізованої системи.



Графік керування, що стабілізує систему.

## Приклади завдань, розроблених за допомогою Wolfram Mathematica.

### Домашнє завдання 2.

#### Варіант 3.

1. Чи є система  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 - u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4, \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 3x_4 - 3u, \\ \dot{x}_4 = x_3 - x_4, \end{cases}$  повністю керованою? Привести систему до канонічного вигляду. Чи є ця система стабілізовною?

2. Стабілізувати систему  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$

3. Знайти кусково-стале керування з точкою перемикання  $t = 1$ , яке за проміжок часу  $[0; 3]$  переводить точку  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  в точку  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  в силу системи  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - u. \end{cases}$  Виписати траєкторію системи, за якою відбувається цей перехід.

Варіант 1.

1. Чи є керованою система 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = 0, \end{cases}$$

на підпростори  $G_1 = \text{Lin}\{e_1\}$  та  $G_2 = \text{Lin}\{e_2, e_3\}$  за наперед заданий час?

Перевірити умови критеріїв керованості на підпростір Калмана та Коробова.

2. Чи є керованою система 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 = x_1 + u, \end{cases}$$

на підпростір  $F = \{x \in \mathbb{R}^4: x_1 = 0\}$  за вільний час? Перевірити умови 1, 2 та

будь-яку іншу відповідного критерію.

3. Керованість лінійних систем з диференційовними матрицями.



Дякую за увагу!